12/11/2018

Παράδειγμα. Έστω οι καμπύλες $c(t)=(t,t,0)$, $t>0$

$$\tilde{c}(t)=(t^3,t^3,0),\ t>0.$$

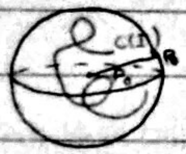
Τότε $k=\tilde{k}=0$ (γιατί η εικόνα τους είναι ευθεία).

- Αν και οι καμπύλες έχουν ίδια καμπυλότητα και ίδια στρέψη δεν είναι ισότιμες γιατί δεν έχουν ίδιο μήκος τόξου.

– Σφαιρικές καμπύλες:

Ορισμός: Μια καμπύλη καλείται σφαιρική αν-ν η εικόνα της περιέχεται σε κάποια σφαίρα του $\mathbb{R}^3$.

Έστω $c: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου s. Υποθέτω ότι είναι σφαιρική.



$$d(c(s),P_0)=R \iff \boxed{\langle c(s)-P_0,\ c(s)-P_0\rangle = R^2} \quad *$$

Παραγωγίζω την (*): $\boxed{\langle \dot c(s),\ c(s)-P_0\rangle=0}$ (1)

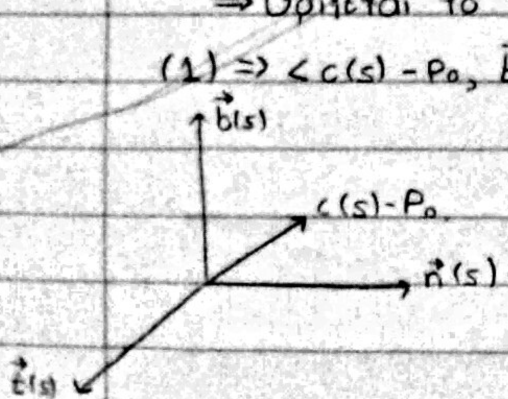
Παραγωγίζω την (1): $\langle \ddot c(s), c(s)-P_0\rangle + \langle \dot c(s), \dot c(s)\rangle = 0$.

$$\boxed{\langle \ddot c(s),\ c(s)-P_0\rangle + 1 = 0} \quad (2)$$

$k(s)=\|\ddot c(s)\|$ (2) $\Rightarrow k(s)>0$ ΠΑΝΤΟΥ.

$\Rightarrow$ Ορίζεται το πλαίσιο Frenet $\{\vec t,\vec n,\vec b\}$ και η στρέψη.

(1) $\Rightarrow \langle c(s)-P_0,\ \vec t(s)\rangle=0$



$$c(s)-P_0=\langle c(s)-P_0,\vec n(s)\rangle\vec n(s)+\langle c(s)-P_0,\vec b(s)\rangle\vec b(s)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \|c(s)-P_0\|=\sqrt{\langle c(s)-P_0,\vec n(s)\rangle^2+\langle c(s)-P_0,\vec b(s)\rangle^2}\\ \|c(s)-P_0\|=R\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\xrightarrow{\text{ΛΗΜΜΑ}}$ $\exists$ λεία καμπύλη $w(s)$ ώστε $\begin{cases}\langle c(s)-P_0,\vec n(s)\rangle = R\cos w(s)\\ \langle c(s)-P_0,\vec b(s)\rangle = R\sin w(s)\end{cases}$

(2)k $\Rightarrow \langle \dot{\vec t},\ c-P_0\rangle=-1 \Rightarrow k\langle \vec n,\ c-P_0\rangle=-1 \Rightarrow \cos w(s)<0.$

$$\boxed{c(s) - P_0 = R\left(\cos w(s)\vec{n}(s) + \sin w(s)\vec{b}(s)\right)}$$ παραγωγίζω:

$$\vec{t} = R\left[-\dot{w}\sin w\,\vec{n} + \cos w\,(-k\vec{t} + \tau\vec{b}) + \dot{w}\cos w\,\vec{b} - \tau\sin w\,\vec{n}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\vec{t} + 0\vec{n} + 0\vec{b} = -Rk\cos w\,\vec{t} + (-R\dot{w}\sin w - R\tau\sin w)\vec{n} + (R\dot{w}\cos w + R\tau\cos w)\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -Rk\cos w \\ 0 = -R\sin w(\dot{w}+\tau) \\ 0 = R\cos w(\dot{w}+\tau) \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \dot{w} + \tau = 0$$

Συμπέρασμα: Για σφαιρικές καμπύλες ισχύουν:

(i) $k = -\dfrac{1}{R\cos w} \geq \dfrac{1}{R}$

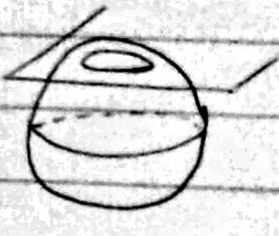
(ii) $\tau = -\dot{w}$

Ερώτημα: Ποιες είναι οι σφαιρικές καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα;

Απάντηση:

$k = \text{σταθ} \Rightarrow w = \text{σταθ} \Rightarrow \dot{w} = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ Η καμπύλη είναι επίπεδη,

Άρα κύκλος διότι είναι σφαιρική.



Υπολογίζω την ποσότητα $\dfrac{\dot{k}}{k^2\tau} = ;$

$$\dot{k} = \frac{(\cos w)^{\cdot}}{R\cos^2 w} = -\frac{\dot{w}\sin w}{R\cos^2 w} \Rightarrow \dot{k} = \frac{R\tau\sin w}{R^2\cos^2 w} \Leftrightarrow \dot{k} = Rk^2\tau\sin w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{k}}{k^2\tau} = R\sin w} \quad \boxed{R\cos w = -\frac{1}{k}} \quad \boxed{\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 = R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}}$$

Θεώρημα: (Χαρακτηρισμός Σφαιρικών Καμπυλών)

Έστω $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο καμπυλότητας $k(s)>0 \ \forall s\in I$ και στρέψη $\tau(s) \neq 0 \ \forall s \in I$. Η c είναι σφαιρική $\Leftrightarrow \left(\frac{\dot k}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}$ (1)

Απόδειξη:

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (1). Θεωρώ τη διανυσματική συνάρτηση:

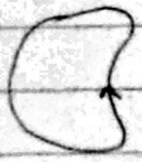
$$\alpha(s) = c(s) + \frac{1}{k(s)}\vec n(s) - \frac{\dot k}{k^2\tau}\vec b(s) \Rightarrow \dot\alpha \underset{\text{Εξίσωση Frenet}}{\overset{(1)}{=\!=\!=}} \vec t + \dots = 0 \Rightarrow \alpha(s) = p_0.$$

$$\Rightarrow \|c(s) - p_0\| = \sqrt{\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2 + \left(\frac{\dot k(s)}{k^2(s)\tau(s)}\right)^2}$$

$$\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{\dot k}{k^2\tau}\right)^2\right)^{\cdot} \overset{(1)}{=} \dots = 0 \Rightarrow \|c(s)-p_0\| = \text{σταθ.} \Rightarrow$$ Η c είναι σφαιρική.

Κλειστές Καμπύλες:

Ορισμός: Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο. Η c καλείται κλειστή αν-ν $\exists L>0$ ώστε $c(s+L) = c(s) \ \forall s \in \mathbb{R}$



Ισχύει: $\frac{\pi}{2} < \omega(s) < \frac{3\pi}{2}$.

Αν c είναι κλειστή σφαιρική καμπύλη, τότε $\omega(s+L) = \omega(s)$

$$\int_0^L \tau(s)ds = -\int_0^L \dot\omega(s)ds = -(\omega(L) - \omega(0)). \qquad \pi/2 < \omega(0) < 3\pi/2, \quad \pi/2 < \omega(L) < 3\pi/2$$

Άσκηση: Έστω $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με φυσική παράμετρο, θεωρώ $\sigma \in \mathbb{R}$ και θεωρώ την καμπύλη $c_\sigma: [a,b] \subset I \to \mathbb{R}^2$ (παράλληλη της c κατά σ)

$c_\sigma(s) = c(s) + \sigma\vec n(s)$.

(i) Νδο για σ μικρό η καμπύλη c_σ είναι κανονική

(ii) Να βρεθεί η καμπυλότητα και το πλαίσιο Frenet της c_σ.

Απόδειξη:

$\vec t(s) = \dot c(s)$, $\vec n(s) = J\vec t(s)$ $\begin{cases} \dot{\vec t} = k\vec n \\ \dot{\vec n} = -k\vec t \end{cases}$

(i) $\frac{dc_\sigma}{ds} = \dot c(s) + \sigma\dot{\vec n}(s) = \vec t(s) - \sigma k(s)\vec t(s) \Rightarrow \frac{dc_\sigma}{ds} = (1 - \sigma k(s))\vec t(s)$

Η $\dot{c}_\sigma$ δεν είναι κανονική σε εκείνα τα s, όπου $k(s)=\frac{1}{\sigma}$.

Η k ως συνεχής στο $[a,b]$ έχει μέγιστο k_1 και ελάχιστο k_0.

$k_0 \quad k_1 \quad 1/c$ Επιλέγω $1/c > k_1$.

$$\frac{dc_\sigma}{ds} = (1-\sigma k(s))\vec{t}(s), \quad 1-\sigma k(s)>0.$$

Άρα $\left\|\frac{dc_\sigma}{ds}\right\| = 1-\sigma k(s)$.

Το μήκος τόξου $\bar{s}$ της c_σ είναι $\bar{s} = \int_{s_0}^{s}\left\|\frac{dc_\sigma}{dw}\right\| dw = \int_{s_0}^{s}(1-\sigma k(w))\,dw$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο $\vec{\bar t}$ της c_σ είναι $\vec{\bar t} = \frac{dc_\sigma/ds}{\|dc_\sigma/ds\|}$

$\boxed{\vec{\bar t} = \vec t}$ και συνεπώς το μοναδιαίο κάθετο $\vec{\bar n}$ της c_σ είναι:

$$\vec{\bar n} = J\vec{\bar t} = J\vec t \Rightarrow \boxed{\vec{\bar n} = \vec n}$$

Οι εξισώσεις Frenet για τη c_σ είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\bar t}}{d\bar s} = \bar k\,\vec{\bar n} \Leftrightarrow \dfrac{d\vec t}{d\bar s} = \bar k\,\vec n \Leftrightarrow \dfrac{ds}{d\bar s}\dfrac{d\vec t}{ds} = \bar k\,\vec n \Leftrightarrow \dfrac{d\bar s}{ds} = 1-\sigma k(s) \Rightarrow \dfrac{1}{1-\sigma k(s)}\dot{\vec t} = \bar k\,\vec n \\ \dfrac{d\vec{\bar n}}{d\bar s} = -\bar k\,\vec{\bar t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(s)}{1-\sigma k(s)}\vec n(s) = \bar k(s)\vec n(s) \Rightarrow \bar k(s) = \frac{k(s)}{1-\sigma k(s)}.$$

Άσκηση: Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $c(t) = (t - \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t + \sin t)$.

(i) Είναι κανονική;

Αν είναι κανονική:

(ii) Να βρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία της στο $t = \pi$.

(iii) Να βρεθεί το μήκος $L_1^4(c)$.

(iv) Να βρεθεί το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$

(v) Να βρεθεί η καμπυλότητα ως συνάρτηση του μήκους τόξου.

(vi) Βρείτε το πλαίσιο Frenet

(vii) Είναι η καμπύλη σφαιρική ή σταθερά κλίση;

Λύση:

(i) Η c είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (1 - \sqrt{3}\cos t, -2\sin t, \sqrt{3} + \cos t)$

$\|c'(t)\| = 2\sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ Η c κανονική.

(ii) $c'(\pi) = (1 + \sqrt{3}, 0, \sqrt{3} - 1)$. Η εφαπτόμενη ευθεία διέρχεται από το ~~στο~~ $c(\pi) = (\pi, -2, \sqrt{3}\pi)$ και είναι $\parallel c'(\pi)$ δηλ. έχει εξισώσεις.

$$\frac{x - \pi}{1 + \sqrt{3}} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - \sqrt{3}\pi}{\sqrt{3} - 1}$$

(iii) $L_1^4 = \int_1^4 \|c'(t)\| dt = \dots$

(iv) Μήκος τόξου: $s = \int_0^t \|c'(u)\| du = \int_0^t 2\sqrt{2}\, du \Rightarrow \boxed{s = 2\sqrt{2}t} \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{s}{2\sqrt{2}}}$

Η αναπαραμέτρηση της c με μήκος τόξου είναι η καμπύλη:

$\tilde{c}(s) = c\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) = (\dots, \dots, \dots)$

Υπολογισμοί ως προς το μήκος τόξου	Υπολογισμοί ως προς t
$\vec{t}(s) = \dot{c}(s) = \dots$	$\vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|} = \dots$
$k(s) = \|\ddot{c}(s)\| = \dots = 1/4$	
$\vec{n}(s) = \ddot{c}(s) / k(s) = \dots$	$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \dots = 1/4$
$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$	
$\tau(s) = \frac{[\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dddot{c}(s)]}{k^2} = \frac{1}{4}$	$\vec{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}$, $\vec{n}(t) = b(t) \times \vec{t}(t)$
	$\tau(t) = \frac{[c'(t), c''(t), c'''(t)]}{\|c'(t) \times c''(t)\|} = \dots = 1/4$